УДК 373.3.091.33

Осипенко Л.Е.
Московский городской педагогический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО- ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ

L. Osipenko
Moscow City Pedagogical University

MATHEMATICAL CONTENT OF EDUCATIONAL RESEARCH ACTIVITIESIN STUDYING SCIENCES

Аннотация. Показано, что важнейшей тенденцией интеграции научных знаний является математизация наук. В учебно-исследовательской деятельности по естественнонаучным дисциплинам математика имеет три аспекта. Первый из них позволяет зафиксировать и обобщить исходные числовые данные, полученные в ходе эмпирических исследований. Второй – предполагает построение и формальное исследование математической модели. Третий аспект приложения математики в учебно-исследовательской деятельности по естественным наукам – это проверка адекватности модели.

Ключевые слова: естественные науки, математика, учебно-исследовательская деятельность, измерение, математическое моделирование, статистические характеристики данных, число, функция.

Abstract. It is shown that the most important tendency in integrating scientific knowledge is the process of Mathematics' penetration into studying Sciences. Mathematics reveals itself in three aspects in the research activities. The first one enables to establish and generalize raw numeric data obtained within the course of an empirical research. The second one involves the construction and formal investigation of a mathematical model. The third aspect of Mathematics application in the process of studying and research activities at the lessons of Sciences is testing the adequacy of mathematical models.

Key words: Sciences, Mathematics, studying and research activities, measurement, mathematical modeling, statistical properties of data, number, function.

При рассмотрении философских аспектов интеграции наук учеными [2; 4; 9; 10] обозначается «все усиливающаяся их взаимосвязь, взаимодействие посредством широкого использования общих идей, средств, приемов исследования окружающей действительности, уплотнение знаний в определенно сложившихся и постоянно совершенствующихся формах познания и выражения познанного» [10, с. 63]. Одной из важнейших тенденций интеграции научных знаний учеными называется *математизация естественных* наук – процесс проникновения математических методов в различные сферы естественнонаучного познания.

Данная идея не нова, поскольку еще с античных времен математика считалась «прообразом мира». «Cum Deus calculat, fit Mundus», что в переводе означает «Как Бог вычисляет, так мир и делает». Ньютон в «Математических началах натуральной философии» [6] говорил о подчинении различных явлений законам математики.

В настоящее время при оценке знаний учащихся по программе PISA отдельным аспектом изучается математическая грамотность школьников – их способность использовать математику для удовлетворения настоящих и будущих потребностей, присущих созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину [5].

Математика играет особую роль учебной, в том числе и учебно-исследовательской деятельности по естественнонаучным дисциплинам. При всем многообразии прикладных аспектов требуется конкретизация математических знаний, необходимых для проведения учебных исследований по естественнонаучным дисциплинам. Выявление таковых и составило основную цель данной публикации.

Исследование по естественным наукам начинается со сбора эмпирических фактов. С позиции рассматриваемого нами контекста, одним из наиболее значимых методов является измерение, дающее объективную информацию об исследуемом явлении, выраженную числом. Не случайно еще Г. Галилей отмечал: «Измеряй все, что измеримо, и сделай измеримым то, что таковым пока еще не является» [3]. Поскольку размеры объектов в окружающем мире варьируются от элементарных частиц до Вселенной, то, соответственно, актуален вопрос о стандартной записи числа.

Для проведения измерений необходимы приборы и приспособления. Несмотря на их громадное разнообразие, процесс измерения и необходимые для его проведения математические расчеты имеют много общего. Так, каждый прибор имеет следующие числовые характеристики: диапазон измерения, цену деления, точность (погрешность) измерения. И если первую и третью характеристику можно найти непосредственно на приборе или в справочнике, то для определения цены деления прибора необходимы несложные математические расчеты (1):

$$\text{Ц. д.} = \frac{b-a}{n}\ [\text{размерность}] \qquad (1),$$

где: a – минимальное значение величины, b – максимальное значение величины, n – количество между ними промежуточных («немых») делений.

В ряде случаев значения всех исходных данных являются точными. Например, точными числами являются: некоторые числовые коэффициенты и показатели степени в формулах, коэффициенты, выражающие кратность и дольность единиц измерения, числа, обозначающие цены, тарифы, масштабы, числа, заданные определениями и т.д. Точными также являются коэффициент 4/3 в формуле объема шара, коэффициенты 100 в равенстве 5м = 5×100 см, число 2 в химической формуле воды H_2O; точка кипения воды (при нормальном давлении) t = 100°C и т.д. Расчеты с ними производят по правилам точных вычислений.

Однако при проведении учебных исследований не всегда требуются сверхточные данные, содержащие большое количество значащих цифр. Следовательно, возможно проведение округлений полученных результатов измерений. Такого рода математические операции ведутся по определенным правилам. Так, уже в начальной школе учащиеся знакомятся с основными правилами округления: если первая отбрасываемая цифра 5 и больше, то последнюю сохраняемую цифру нужно увеличить на 1, например, 35,736 ≈ 35,74. Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю сохраняемую цифру не меняют, например, 35,73 ≈ 35,7.

При проведении эмпирических исследований школьники применяют как прямые, так и косвенные измерения. Если результат измерения (назовем его условно x) снимается непосредственно с измерительного прибора, то такое измерение называется прямым. На результат такого измерения влияет множество факторов, в конечном итоге приводящих к различным результатам измерений. Наличие такого разброса требует проведения нескольких измерений, результаты которых обозначим x_1, x_2, x_N. В качестве окончательного результата прямого измерения принимается среднее арифметическое всех измерений (2):

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N}. \qquad (2)$$

Следовательно, актуализируются вопросы по изучению школьниками статистических характеристик набора данных: среднее арифметическое значение, медиана, размах выборки.

При прямых измерениях, как правило, учитывают три типа ошибок: приборную, ошибку округления и случайную.

Приборная ошибка возникает вследствие несовершенства любого прибора. Поэтому каждый тип прибора имеет максимальную погрешность, гарантированную заводом-изготовителем. Как правило, предельные приборные погрешности задаются в справочниках. Однако если в силу каких-либо причин она неизвестна, то в качестве приборной погрешности $\Delta x_{приб}$ можно использовать половину цены наименьшего деления.

В ходе измерений по разным причинам приходится проводить округление результата, поэтому неизбежно появление ошибки округления $\Delta x_{окр}$. Величина этой ошибки принимается равной половине интервала округления.

Случайные погрешности обусловлены одновременным действием большого числа неконтролируемых изменяющихся величин. В учебном исследовании случайную ошибку можно оценить, подсчитав его отклонение от среднего значения (3):

$$\delta x_{случ} = \left| x_k - \langle x \rangle \right| \qquad (3)$$

и вычислить среднее значение этих отклонений (4):

$$\Delta X_{случ} = (\delta x_1 + \delta x_2 + \cdots \ldots \delta x_N)/N = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - \langle x \rangle|\right)/N \qquad (4)$$

Полная погрешность прямого измерения, объединяющая все три типа ошибок, будет примерно равна сумме всех трех ошибок (5):

$$\Delta X = \Delta X_{приб} + \Delta X_{случ} + \Delta X_{округ} \qquad (5)$$

Как показывает практика, необходимо специально обучать школьников грамотной записи численного результата, содержащей численное значение, погрешность, размерность. Окончательный результат любого измерения записывается в интервальном виде (7):

$$x = \left(\langle x \rangle \pm \Delta x\right)\left[размерность\right]. \qquad (6)$$

В ряде случаев при проведении исследований целесообразно рассчитать и привести относительную погрешность $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}$, которую принято выражать в процентах. Очевидно, что ребенок должен иметь представление о процентах [8].

Исследование по естествознанию не сводится только к сбору и обобщению эмпирических данных, которые должны быть логически и математически обработаны. Следовательно, актуализируется вопрос обобщения данных, например, в форме таблиц, размерность которых с ростом сложности решаемых школьниками задач постепенно увеличивается.

Числовые данные, полученные в ходе эмпирических исследований, могут быть также представлены графическим способом, очевидным достоинством которого является наглядность. Очевидно, что для проведения исследований ребенок должен уметь строить и читать графики функций.

Полученные результаты должны быть критически оценены. Опыт нашей работы показал, что у многих школьников вызывает затруднение решение задач, предполагающих соотнесение величины скорости (60 км/ч, 200 м/с и 6000 м/ч) с объектами, которые могут ее иметь (например, ракета, турист и автомобиль). Данное задание также наглядно демонстрирует необходимость целенаправленного обучения школьников переводу единиц измерения в систему СИ (например, км/ч в м/с).

В естественных науках при изучении различных сторон окружающей действительности используют метод моделирования. В определенном смысле его можно сравнить с условиями деятельности научного фантаста, поскольку «трудностей в практической реализации идей не существует. Имеет место не скованное условиями творческое моделирование более или менее правдоподобных ситуаций, ограничиваемое лишь требованием внутренней непротиворечивости, самосогласованности, когерентности процесса и результата конструирования [7, с. 81].

Возможности чисто формального исследования различных математических конструктов, описывающих различные явления и процессы, происходящие в природе, используются при математическом моделировании, сущность которого образно выразили философы во фразе: «Поиск идеи вещи» [11]. Именно поэтому поиск этой идеи на практике должен быть преобразован функциональным или формульным способом, предполагающим оперирование математическим языком чисел, то есть необходимо построение математической модели исследуемого процесса или явления, в основе которой лежат определенные балансовые соотношения, связывающие входные и выходные переменные. Например, сильно изрезанную береговую линию побережья южной части Норвегии можно представить не только графически, но и описать математическим языком: $L(\delta) = a\delta^{1-D_f}$.

Выделение содержания, необходимого для математического моделирования, неотделимо от его этапов. Так, построение математической модели начинается с выбора тех математических величин, которые будут служить характеристиками исследуемого явления. Например, движение материальной точки, совершающей гармонические колебания, описывает функция $x(t)$, задающая координату точки x в произвольный момент времени t. То есть ребенок должен уметь использовать функциональную символику для записи разнообразных фактов.

После того, как определены математические величины, описывающие исследуемый процесс, необходимо найти уравнения, которым подчиняются введенные характеристики. Для этого необходим поиск моделей-аналогий. Следовательно, ребенок должен иметь представления о такого рода зависимостях (для средней общеобразовательной школы – это прямая и обратно пропорциональная зависимости, квадратичная, показательная, логарифмическая функции и др.), которые ребенок должен уметь исследовать чисто математически, извлекая формальные следствия. Например, для химии актуальным является поиск одного из членов пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, а также решение задач на проценты.

Однако «голая» математическая модель, хотя и объясняет «идею вещи», не может быть сразу принята в качестве теории. Чтобы она стала таковой, необходимо придать математическим символам конкретное эмпирическое содержание, или, как образно выразился А.С. Пронин, математическую модель, следует «приколотить» к численным характеристикам, описывающим исследуемое явление [7]. Как показывает наш опыт работы, для большинства учеников математические абстракции слабо соотносятся с реальными процессами и явлениями. Академик В.И. Арнольд в своем выступлении на дискуссии о преподавании математики отмечал, что «тонкий яд математического образования» для физика состоит именно в том, что абсолютизируемая модель отрывается от реальности и перестаёт с нею сравниваться. Он высказывал опасения на предмет фетишизирования теорем, которые встречаются даже в лучших современных учебниках математики. «У меня даже создалось впечатление, что математики-схоласты, мало знакомые с физикой, верят в принципиальное отличие аксиоматической математики от обычного в естествознании моделирования, всегда нуждающегося в последующем контроле выводов экспериментом» [1]. Поэтому мы считаем необходимым иллюстрировать математические формулы конкретными примерами из реальной жизни или с контекстом из смежных величин.

Поскольку при построении математической модели отбрасываются многие связи, то есть огрубляется математическое описание, соответственно, и математическая модель, как правило, является приближенной. Поэтому вполне правомерен вопрос об ее адекватности, т.е. соответствия ее результатов реальному течению прогнозируемого с ее помощью процесса.

В естественных науках проверка адекватности модели проводится на основании информации, полученной в ходе проведения специально спланированного эксперимента, когда исследователь наблюдает интересующие его процессы. Цель эксперимента состоит в доказательстве факта, что точность результатов, полученных при моделировании в рамках оговоренной погрешности, не ниже точности расчетов, произведенных на основании эксперимента. Если в процессе исследования не возникает очевидных противоречий между моделью и результатами эксперимента, то модель считается адекватной. Модель, неадекватность которой выяснилась в процессе эксперимента, либо подвергается коррекции, либо дополняется, либо заменяется новой.

В ходе эмпирического этапа исследования необходимо также оценить полученные результаты, сформулировать и записать его окончательные результаты.

Таким образом, математика в учебно-исследовательской деятельности по естественным наукам имеет три аспекта. Первый (количественный) позволяет зафиксировать и обобщить исходные числовые данные, полученных в ходе эмпирических исследований, в том числе в виде таблиц, графиков и диаграмм. Для их проведения ученик должен владеть правилами точных вычислений, определять диапазон измерения прибора и цену его деления, уметь считывать результаты измерений, при необходимости – представлять их в стандартном виде, переводить в систему СИ, а также проводить статистическую обработку экспериментальных данных, предполагающую знание учащимися правил округления чисел, определение погрешности измерений, в том числе в процентах.

Одним из важных этапов исследования является построение математической модели. Для ее построения ученик должен уметь использовать функциональную символику для записи отношений между величинами, математически исследовать полученные соотношения, строить ее графики.

Однако в учебно-исследовательской деятельности по естественным наукам математические формулы нельзя воспринимать сугубо формально. Они должны быть наполнены конкретным содержанием, критически оценены и согласованы с результатами эмпирических исследований. Поэтому третий аспект приложения математики в учебно-исследовательской деятельности по естественным наукам – это проверка адекватности модели, предполагающая идентификацию формальных математических конструктов с экспериментально полученными эмпирическими данными.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Арнольд В.И. О преподавании математики [Электронный ресурс] // Математика, интересная для меня [сайт]. URL: http://www.ega-math.narod.ru/Arnold2.htm (дата обращения: 21.04.2013).
2. Баксанский О.Е. Физика и математика: Анализ оснований взаимоотношения: Методология современного естествознания. – М., 2009. – 217 с.
3. Галилео Галилей. Пробирных дел мастер / Пер. Ю.А. Данилова. – М., 1987. – 272 с.
4. Данилюк А.Я. Теория интеграции образования. – Ростов-на-Дону., 2001. – 440 с.
5. Ковалева Г.С. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся / Г.С. Ковалева, Э.А. Красновский, Л.П. Краснокутская, К.А. Краснянская // Педагогическая диагностика. – 2006. – № 1. – С. 161–175.
6. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М., 1989. – 687 с.
7. Пронин А.С. Об эффективности математики в научном познании / А.С. Пронин, К.И. Ромашкин // Вестник МГОУ. Серия «Философские науки». – 2012. – № 2. – С. 81- 85.
8. Слободянюк А.И. Организация исследовательской деятельности учащихся по физике: учебно-метод. пособие / А.И. Слободянюк, Л.Е. Осипенко, Т.С. Пролиско. – Мн., 2008. – 144 с.
9. Урсул А.Д. Философия и интегративно-общенаучные процессы. – М., 1981. – 367 с.
10. Чепиков М.Г. Интеграция науки: (философский очерк). – М., 1981. – 276 с.
11. Яблонский А.И. Модели и методы исследования науки. – М., 2001. – 400 с.