УДК 37. 016: 51

Костылева М.В.
Институт содержания и методов обучения РАО (г. Москва)

РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗВИВАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

M. Kostylyeva
Institute of Content and Teaching Methods, Moscow

THE REALIZATION OF THE DEVELOPING FUNCTION OF MATHEMATICS IN THE PROCESS OF THE STUDENTS' EXPLORATORY ACTIVITY AT THE LESSONS OF ALGEBRA AND THE PRINCIPLES OF MATHEMATIC ANALYSIS

Аннотация. В данной статье рассматривается структура теоретических исследований, включающая в себя процесс творческой деятельности, логику познания и владение общими способами решения задач. Исследовательская деятельность обеспечивает овладение учащимися методами научного познания, методами математической творческой деятельности, вызывает интерес к предмету, стимулирует глубокое изучение способов и приемов деятельности, применяемых в науке, без которых невозможно самостоятельное получение знаний, самостоятельное решение проблем. В статье определены действия педагога и учащегося в ходе исследовательской работы. На конкретном примере одной из исследовательских работ по алгебре и началам анализа показана методика проведения исследования; как на практике реализуется развивающая функция математики при изучении алгебры и начал анализа.

Ключевые слова: развивающая функция, учебное исследование, исследовательская деятельность, развитие способностей, творческое мышление, математическая компетентность.

Abstract. The article describes the structure of a theoretical research which includes the process of creative activities, the logics of cognition and the skill in handling the common principles of doing the sums. The research activity ensures the students with the methods of scientific cognition, the methods of mathematical creative activities, arouses their interest to the subject. Besides it, stimulates them to study the methods and modes of the scientific activities without which it is impossible to get knowledge independently. The article defines the teacher's and student's order of functioning in the research activity. The methods of experimentation are shown on the concrete example of a research work on algebra and the principles of mathematic analysis. The author described the way the developing function of mathematics is implemented while studying algebra and the principles of mathematic analysis.

Key words: developing function, educational research, creative activity, development of abilities, creative thinking, mathematic competence.

Стратегические направления развития образования в Российской Федерации определяются Законом «Об образовании», «Национальной доктриной образования в Российской Федерации на период до 2025 г.», «Концепцией профильного обучения на старшей ступени общего образования». Интеллектуальное и нравственное развитие человека на основе вовлечения его в разнообразную самостоятельную деятельность в различных областях знаний – стратегическое направление развития образования.

С точки зрения приоритета развивающей функции конкретные математические знания рассматриваются не столько как цель обучения, сколько как база для организации полноценной в интеллектуальном отношении деятельности учащихся [2]. Для формирования личности учащегося, для достижения высокого уровня его интеллектуального развития необходимо организовать учебную деятельность таким образом, чтобы учащиеся учились мыслить, находить ответы на поставленные вопросы, ставить и решать проблемы, гипотезы, т. е. добывать знания, опираясь на известные. Этому способствует организация исследовательской деятельности учащихся на уроках алгебры и начал анализа.

«Исследовательская деятельность является одной из форм творческой деятельности, поэтому ее следует рассматривать в качестве составной части проблемы развития творческих способностей учащихся» [1].

Целями исследовательской деятельности являются:

– совершенствование навыков самостоятельной исследовательской работы;

– формирование исследовательской компетентности;

– углубление знаний в выбранной предметной области;

– формирование информационной культуры учащихся;

– самоопределение будущего направления профессиональной деятельности.

Содержательную основу исследовательской деятельности составляет взаимосвязь между содержанием изучаемого материала, методами и формами учебной работы. Процессуальную основу составляет научно-образовательная, поисково-творческая деятельность, способствующая организованному усвоению опыта творческой деятельности и творческому усвоению и применению знаний. Приобщение учащихся к исследовательской деятельности осуществляется через решение исследовательских задач, решение проблемных ситуаций, через дополнительную работу над задачей.

В математике применяются различные виды исследований: схемы исследования задач на построение; схемы исследования различных функций; решение исследовательских задач, применение всевозможных алгоритмов и т. д.

Л.М. Фридман отмечал: «Работа учащихся по решению учебных задач осуществляется с помощью особых учебных заданий. Эти задания требуют от учащихся в явном виде проведения исследования, анализа, самостоятельного изучения каких-то явлений, процессов, фиксации результатов изучения в виде знаково-символических моделей этих явлений и способов их изучения. Выполнение этих заданий носит теоретический характер и вводит тем самым учащихся в лабораторию научной мысли, помогает приобрести опыт подлинно творческого мышления» [5]. Исследовательские задания – небольшие поисковые задачи, требующие прохождения всех или большинства этапов процесса исследования.

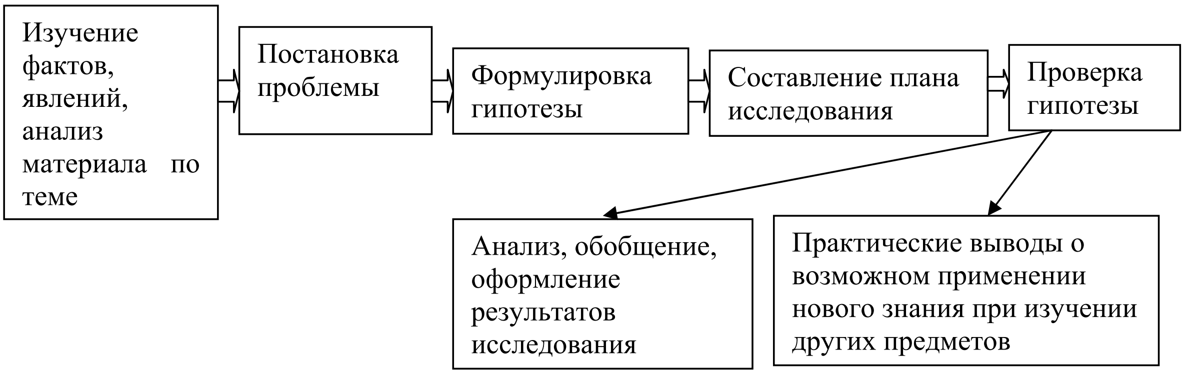
Эффективным средством реализации развивающей функции математики при изучении алгебры и начал анализа является организация и проведение исследовательских работ, цель которых – помочь учащимся самостоятельно открыть новые знания, способы деятельности, систематизировать, обобщить и углубить знания, научить применять полученные знания в новой ситуации, развивать способности учащихся, повышать их учебную и творческую активность. Исследовательские работы являются эффективным средством развития способностей учащихся, творческого мышления [4]. Они повышают их учебную и творческую активность; позволяют связать отдельные темы алгебры и начал анализа с учебным материалом геометрии, физики, вписываются в контекст и структуру учебного процесса. Некоторые исследовательские работы (или их часть) могут быть выполнены на уроке, остальные – в качестве домашних исследований.

Основные этапы исследовательской работы по математике отражены в схеме 1.

Положительная динамика исследовательской деятельности учащихся зависит от умелого руководства учителя, его компетентности, умения правильно спланировать исследовательскую деятельность, правильно подобрать формы и виды заданий для исследования, умело организовать и спланировать самостоятельную поисковую учебную деятельность учащихся по получению знаний, умений, приобретению навыков, усвоению способов умственной деятельности. Дея-

Схема 1

Основные этапы исследовательской работы по математике



тельностный подход и личностно ориентированное обучение создают условия для развития субект-субъектных отношений учителя и учащихся. Это мы отразили в табл. 1.

Рассмотрим, как происходит реализация развивающей функции математики при изучении алгебры и начал анализа на примере одной из исследовательских работ:

Таблица 1

Деятельность учителя и учащихся при проведении учебного исследования

Система действий учителя при организации исследовательской деятельности учащихся	Система действий учащихся при проведении исследовательской работы
1. Мотивирует учащихся на проведение исследовательской работы через осознание социальной, практической и личной значимости исследовательской работы 2. Знакомит учащихся с содержанием исследовательской деятельности, организует учебный процесс таким образом, чтобы учащиеся сами открывали новое знание 3. Осуществляет руководство и наблюдение (доклады, сообщения, проекты, основанные на самостоятельном поиске, анализе, обобщении фактов) 4. Использует дифференцированное обучение при проведении исследования 5. Создает проблемные ситуации для организации учебного исследования на уроке, в зависимости от поставленной цели урока 6. Использует индивидуальные и групповые формы работы на уроке при проведении исследования 7. Консультирует учащихся по подбору нужной информации, использованию различных источников информации. Контроль и коррекция исследовательского процесса	1. Подбор и изучение необходимого теоретического материала, работа с различными источниками информации по теме исследования 2. Постановка проблемы, формулировка (выдвижение) гипотез 3. Осознанное применение имеющихся знаний при проведении исследования, выделение алгоритма выполнения действий, систематизация и анализ собранного материала 4. Закрепление исследовательских умений в процессе проведения самостоятельного исследования, проверка выдвинутых гипотез 5. Проведение контроля и самооценки деятельности при выполнении специальных заданий, доказательство или опровержение гипотез 6. Отчет о проведенном исследовании: готовят презентации либо оформляют как проект и на уроке осуществляют его защиту 7. Анализ проделанной работы, формулировка основных выводов по теме исследования, возможности применения полученных результатов

Тема: **Методы решения уравнения** $a\sin x + b\cos x = c$.

<u>Образовательная цель работы</u>: исследовать применение различных способов решения данного уравнения, рассмотреть примеры использования данного уравнения при решении некоторых тригонометрических уравнений, рассмотреть примеры использования данного уравнения при решении физических, геометрических задач.

<u>Развивающая цель</u>: формирование устойчивого интереса к математике, развитие математических, творческих способностей, математической компетентности, развитие навыков устной и письменной речи.

Содержание работы

I. Теоретическая часть

1. Методы решения уравнения вида: $a\sin x + b\cos x = c, b \neq 0, a > 0$.

1 способ: введение вспомогательного угла (исследовать, как может быть записано значение угла φ в зависимости от знаков коэффициентов *а*, *в*).

Решение: представим левую часть уравнения в виде $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

имеем $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Это уравнение имеет решение, если $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$, т. е. $c^2 \leq a^2+b^2$. При этом условии

$$x+\varphi = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n$$

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n$$

Так как $\cos\varphi > 0$, то аргумент φ можно брать в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тогда решение исходного уравнения запишем так:

$$x = -\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n.$$

<u>Проблема</u>: всегда ли уравнение имеет действительные решения?

План решения:

а) выяснить, при каком условии, связывающем параметры *a, b, c,* существуют действительные решения уравнения;

б) выяснить, при каком условии этот метод приводит к потере корней?

<u>Гипотеза</u>: при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ (тогда и только тогда, когда $b+c = 0$.

<u>Проверка гипотезы</u>.

После обсуждения решения учащиеся приходят к выводу, что так как этот метод приводит к потере корней вида $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, то необходима проверка множества значений *x*, на которое сузилась область определения неизвестной в уравнении.

2 способ: с помощью универсальной подстановки.

3 способ: сведение к однородному второй степени (использование формул двойных углов).

Рассматривая решение уравнений несколькими способами, ученикам показывается вариативность подходов к изучению алгебры и начал анализа, так как это эффективный путь реализации дидактических принципов сознательности и активности усвоения изучаемого материала. Учащиеся используют такие математические методы исследования, как анализ, синтез, обобщение, систематизация, дедукция. В процессе выполнения такой работы развивается творческая активность, творческое мышление, а оно, в свою очередь, развивает интеллектуальную сферу ученика, его мировоззрение, нравственные качества; происходит формирование и развитие внимания, критичности.

Различные способы решения задач способствуют тому, что школьники учатся самостоятельно находить более рациональные, красивые решения задач, устанавливают взаимосвязь между отдельными частями математики, учатся видеть красоту математической задачи и математики в целом. Всё это активизирует познавательную деятельность, прививает интерес к предмету. «Систематическая, планомерная и настойчивая работа в привитии учащимся навыков в отыскании различных способов решения задач способствует развитию приемов логического поиска, который, в свою очередь, развивает исследовательские способности учащихся» [1].

Задание: решить уравнение

$$3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0.$$

Решить тремя способами, выяснить, какой способ лучше? Обосновать рациональность каждого способа решения.

Учащиеся делают вывод: введение вспомогательного угла и сведение к однородному – наиболее рациональные способы решения, так как не требуется проверка корней в силу равносильности преобразований.

4 способ: возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Учащимся предлагается решить уравнение $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$ этим способом. Они убеждаются, что этот метод требует обязательной проверки корней, так как обязательно появляются посторонние корни при $c \neq 0, a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$, но проверка корней довольно громоздка, возникают технические трудности (трудоёмкие вычисления).

Решение различных задач позволяет учащимся получить новые знания, но задачи исследовательского характера еще и позволяют усвоить основные методы исследовательской работы. Поиск путей решения, нахождение оптимального решения задачи способствует формированию повышенного интереса к изучению математики, развитию способностей, самостоятельности, готовности к самоопределению.

Примеры решения уравнений учащимися:

1. Решить уравнение

$$4\sin(2x + 20^\circ) - \cos(2x + 200^\circ) = 3.$$

Решение: так как

$\cos(2x + 200^\circ) = -\cos(2x + 20^\circ)$, то

$$4\sin(2x + 20^\circ) + \cos(2x + 20^\circ) = 3,$$

откуда $\sqrt{17}\sin(2x + 20^\circ + \varphi) = 3$,

где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$, получили простейшее уравнение

$\sin(2x + 20^\circ + \varphi) = \frac{3}{\sqrt{17}}$, находим, что

$$2x + 20^\circ + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{3}{\sqrt{17}} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{18} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\frac{3}{\sqrt{17}} + \frac{\pi}{2}n$$

2. Решить уравнение $3\sin x - 2\cos x = 2$

Это уравнение учащиеся решают с помощью введения вспомогательного угла. Предлагается еще один способ его решения (универсальная подстановка): пусть $x \neq \pi + 2\pi n$, выражаем sin x и cos x через $tg\frac{x}{2}$, получим уравнение:

$$3\cdot\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - 2\frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = 2$$

после преобразований получаем:

$$tg\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$$

отсюда находим, что $x = 2arctg\frac{2}{3} + 2\pi n$.

Задание: Проверить, будут ли числа $x = \pi + 2\pi n$ удовлетворять исходному уравнению. Подставив их в левую часть этого уравнения, мы получили:

$$3\sin(\pi + 2\pi n) - 2\cos(\pi + 2\pi n) = -\cos\pi = 2$$

– удовлетворяют.

Ответ: $x = 2arctg\frac{2}{3} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$.

II. Применение полученных знаний (применение методов решения уравнения $a\sin x + b\cos x = c$)

Учащиеся должны не только владеть теорией в той степени, которая соответствует программе, но и применять полученные знания при решении задач, на практике.

Развитию самостоятельности мышления способствуют задачи, требующие анализа условия сложной задачи, необходимых знаний для её решения; самостоятельное составление соотношений, условий по заданным свойствам. Поэтому мы рассматриваем решение более сложных тригонометрических уравнений, в которых используются полученные знания.

1. Решить уравнение:

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x = 2(\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 2 \cdot$$

Учащиеся должны увидеть, как свести это уравнение к рассмотренному ранее.

Решение: *1 способ*: применим формулу понижения степени, получаем $\sin 2x - (2-\sqrt{3})\cos 2x = 1$. Введем вспомогательный угол φ, где

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

получаем

$$\sin(2x-\varphi) = \frac{1}{2}\left(\sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \cos 2x \cdot \frac{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\left(\sin 2x - \cos 2x \cdot \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Выбирая, например, $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$, получаем ответ:

$$x = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi n}{2},$$
$$n \in Z$$

2 способ: Применим формулы двойных углов, основное тригонометрическое тождество, приводим исходное уравнение к однородному $(1-\sqrt{3})\sin^2 x + 2\sin x\cos x - (3-\sqrt{3})\cos^2 x = 0$; разделим обе части на $\cos^2 x \neq 0$, получим $(1-\sqrt{3})t^2 + 2t - (3-\sqrt{3}) = 0$, где $tg\,x = t$. Находим $t = \sqrt{3}, t = 1$, решая совокупность уравнений $tgx = \sqrt{3}, tgx = 1$, получаем ответ:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi m, x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ m, k \in Z.$$

В процессе обсуждения учащиеся делают вывод о том, что корни уравнения, найденные этими способами внешне не похожи. Но в первом способе корни уравнения представлены более удобно. Если бы требовалось найти корни, принадлежащие определенному промежутку, то второй способ был бы более громоздким.

2. Решить уравнение:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c.$$

Решение: обозначим $\sin x + \cos x = u$, получаем $\sin x\cos x = \frac{u^2-1}{2}$, тогда

$$a\cdot u - \frac{b}{2}(1-u^2) = c$$

или $bu^2 + 2au - (b+2c) = 0$,

откуда

$$u = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b(b+2c)}}{b},$$

$$b \neq 0, a^2 + b^2 + 2bc \geq 0,\ |u| \leq \sqrt{2}.$$

3. Решить уравнение:
$2\sin 2x = 3(\cos x + \sin x)$.

Решение: $3u - 2(u^2-1) = 0$,

$u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = 2$ – не подходит, значит
$\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$

$$\cos(x-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos(-\frac{1}{2\sqrt{2}}) + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos(-\frac{1}{2\sqrt{2}}) + 2\pi n$$

Геометрические задачи, решаемые с помощью данного уравнения

1. Найти расстояние между точками, расположенными на стороне равностороннего треугольника, если известно, что они удалены на 1 см от противоположной вершины, а сумма расстояний от каждой из них до сторон треугольника равна $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ см.

2. Найти единичный вектор $\vec{e}$, составляющий угол $60°$ с вектором $\vec{p}=\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1\right)$.

Физические задачи

1. В какие моменты времени ускорение тела, движущегося по закону $s(t)=2\cos t-5\sin t$ (S – в метрах, t – в секундах), равно $5\frac{ì}{ñ^2}$?

Задача сводится к решению уравнения $-2\cos t+5\sin t=$ 5. Учащиеся решают рациональным, на их взгляд, способом.

2. Два тела совершают колебательные движения на прямой от некоторой начальной точки O с амплитудами, равными 2, единичными круговыми частотами и начальными фазами, соответственно равными $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$. В какой момент времени между первыми их остановками они встретятся?

Задача сводится к решению уравнения

$$s_1(t)=s_2(t),$$

где

$$s_1(t)=2\sin(t+\frac{\pi}{6}); s_2(t)=2\sin(t+\frac{\pi}{3}).$$

3. Скорость течения реки в 2 раза меньше собственной скорости моторной лодки. Под каким углом к направлению, перпендикулярному течению, должна двигаться лодка, чтобы она причалила к пункту противоположного берега, расположенному ниже по течению на расстоянии, равном ширине реки? [3]

Результаты исследовательской работы обязательно рассматриваются на уроках; интересные задачи, выводы, формулы записываются всеми учащимися. Обычно работы выполняются группами (4–5 чел.), некоторые выполняются индивидуально.

Учащиеся готовят презентации либо оформляют как проект и на уроке осуществляют его защиту. Основными параметрами оценивания исследовательской работы являются: теоретическое видение исследовательской проблемы; сформированность исследовательских умений и практических навыков; эстетика оформления и представление исследовательской работы.

Таким образом, реализация развивающей функции математики в ходе выполнения исследовательских работ заключается в том, что у учащихся формируется устойчивый интерес к математике, компетенции; повышается качество знаний. Кроме того, обеспечивается развитие навыков устной и письменной речи, умение работать с различными источниками информации, составление плана, конспекта, развиваются умения и навыки мыслительной деятельности, формируются элементы творческих способностей (выделение главного, анализ, обобщение).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Далингер В.А. Компетентностный подход – альтернатива экстенсивному пути развития системы образования: Материалы международной научной конференции «Инновационные технологии в высшем и профессиональном образовании», Испания (Коста Брава), 18 – 25 июля 2007 года // Фундаментальные исследования. – М., 2007. – № 10. – С. 46-47.
2. Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Седова Е.А. Профилированная школа в концепции школьного математического образования // Интернет-журнал «Эйдос», 2003 // http://eidos-journal.livejournal.com/ (дата обращения 15.04.2003)
3. Золотухин Ю.П. Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ // Математика в школе, 2005. – № 6. – С. 56-63.
4. Таможня Е.А. Методическое мышление как разновидность персонального педагогического мышления // Вестник МГОУ. Серия «Педагогика». – М., 2010. – № 1. – 240 с.
5. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике. Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений. – М., 1998. – 224 с.