УДК 37.016:51
DOI: 10.18384/2310-7219-2018-3-117-128

МОДЕЛИРОВАНИЕ. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СРЕД КАК МЕТОДИЧЕСКОЕ СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Казаков Н.А., Пантелеймонова А.В.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24

Аннотация. Распространённой при обучении математике в школе является проблема визуализации чертежей геометрических тел и фигур. В статье рассматриваются пути решения проблемы с помощью создания и исследования материальных и информационных моделей. Наиболее перспективным направлением является применение в учебном процессе технологий визуализации. Даны рекомендации по применению интерактивной геометрической среды *GeoGebra* как средства подготовки обучающихся к решению сложных стереометрических задач.

Ключевые слова: модель, интерактивная геометрическая среда, *GeoGebra*, стереометрия, визуализация.

MODELING. APPLICATION OF INTERACTIVE GEOMETRIC MEDIA AS A METHODICAL MEANS OF IMPROVING THE QUALITY OF PREPARATION FOR THE STATE EXAM IN MATHEMATICS

N. Kazakov, A. Panteleimonova
Moscow Region State University
24, Vera Voloshina ul., Mytishchi, 141014, Moscow region, Russian Federation

Abstract. A common problem in teaching mathematics is the problem of visualizing drawings of geometric bodies and figures. The article considers ways of solving the problem by creating and exploring material and information models. The most promising direction is the use of visualization technologies in the educational process. Recommendations are given on the use of the GeoGebra interactive geometric environment as a means of preparing students for solving complex stereometric problems.

Key words: model, interactive geometric environment, GeoGebra, stereometry, visualization.

С каждым годом мы наблюдаем тенденцию усложнения задач по стереометрии, входящих в КИМы единого государственного экзамена для старшеклассников. Подготовка к решению данных задач требует особого внимания к подбору методических средств обучения.

Изучение стереометрии в школьном курсе математики представляет для обучающихся особые сложности. Прежде всего затруднения связаны с отсутствием наглядных представлений о пространственных объектах. Школьникам тяжело вообразить объект в пространстве, оценить его внутреннюю структуру и тем более выполнить какие-либо преобразования или построения.

Очевидным решением данной проблемы является расширение опыта обучающихся по работе с пространственными фигурами. Можно выделить следующие средства:

- материальные макеты пространственных фигур;
- интерактивные средства компьютерной визуализации.

Материальные модели дают преимущество в аспекте «осязаемости». Однако наряду с этим преимуществом макеты имеют весомые недостатки:

- материальная модель может сломаться;
- материальная модель ограничивает возможности любого её преобразования и зависит от материала её изготовления.

Поясним на примере последний недостаток. При работе с материальной моделью, например, из картона или гипса, мы не сможем наблюдать её внутренней структуры: она будет оставаться на уровне наших внутренних представлений. Даже если модель тела будет изготовлена из прозрачного пластика, мы не сможем в явном виде исследовать какое-либо сложное сечение: для этого надо будет разрезать модель физически.

Наибольшее преимущество в наглядном представлении пространственных фигур даёт применение средств ИКТ. В отличие от работы с материальными объектами, работа в визуальной интерактивной среде предполагает:

- возможность строить модель без материальных затрат;
- возможность изменять внешний вид и размеры модели, выполнять преобразование модели и исследовать её внутреннюю структуру;
- возможность сохранять изменённые модели без утраты их первоначальных прототипов, а также возможность наблюдения (прослеживания) пошагового построения модели.

Для развития пространственного воображения при обучении стереометрии могут применяться визуализации в интерактивной геометрической среде *GeoGebra* [4; 6].

Данная среда предоставляет широкие возможности при решении задач:

- возможность визуализации объекта;
- возможность автоматизированных геометрических построений;
- возможность автоматизированных математических вычислений.

Визуализация объекта посредством построения его математической модели в среде *GeoGebra* и использование динамики чертежа даёт возможность обучающимся более наглядно и глубоко понять внутреннюю структуру объекта. Например, динамика плоскости, секущей конус, дают наглядное представление обучающимся о возможных формах конических сечений.

Автоматизация построений позволяет экономить время педагога, а также демонстрирует наглядно справедливость известных геометрических отношений. Например, задавая три точки на теле, можно автоматически получить сечение этого тела плоскостью, проходящей через данные три точки. Кроме того, для ещё более глубокого исследования сечения по-является возможность создать его двумерный вид (аналогия выносного чертежа).

Для мгновенного вычисления длины отрезка, площади фигуры, объёма тела или величины угла используются встроенные функции. Это также даёт возможность демонстрации справедливости геометрических фактов. Например, получив в сечении куба шестиугольник, легко проверить, является ли он правильным, вычислив автоматически и численно сравнив длины его сторон и величины его углов при вершинах.

Решение задач направлено на достижение планируемых результатов обучения [7]. Интерактивная среда даёт возможность визуализировать чертежи для всех основных типов стереометрических задач:

- задач на построение сечений;
- задач на нахождение угла между прямыми в пространстве;
- задач на нахождение угла между прямой и плоскостью;
- задач на нахождение угла между плоскостями;
- задач на нахождение расстояний, площадей и объёмов.

Исследовав интерактивную модель, выяснив необходимые факты для решения задачи, обучающиеся могут с большей осознанностью приходить к алгоритму решения задачи ЕГЭ по стереометрии. Наработав опыт решения пространственных задач с помощью среды *GeoGebra*, обучающийся переходит к решению задач без использования компьютерной визуализации. Опыт визуализации объектов в компьютерной среде позволяет сократить время на подготовку и обдумывание чертежей без использования среды.

Важно отметить, что интерактивная геометрическая среда является методическим средством, способствующим непосредственному решению задач и повышению качества образовательного процесса. Использование *GeoGebra* как методического средства способствует формированию ИКТ-компетентности педагога, а также повышает мотивацию обучающихся [2; 8].

Эффективность применения среды *GeoGebra* на практике (интерактивный метод обучения) обусловливается лишь в его сочетании с традиционным проблемно-деятельностным методом обучения, а также реализацией творческих аспектов деятельности [3; 5].

Использование среды *GeoGebra* в условиях урока направлено на:

- повышение уровня наглядности и доступности материала;
- проверку выдвигаемых обучающимися гипотез;
- выбор стратегии решения задачи;
- упрощение организации форм работы и сотрудничества в отношении «педагог – обучающийся».

С методической точки зрения работу целесообразно осуществлять по этапам, представленным в таблице 1.

На рисунке 1 представлен скриншот модели сечения куба заданной плоскостью. Видно, что фигура в сечении представляет собой шестиугольник. Чтобы убедиться, что данный шестиугольник является правильным, можно создать двумерный вид сечения (рис. 2).

Таким образом, для решения конкретной задачи при уже построенной модели необходимо осуществить:

- поиск необходимых геометрических соотношений между объектами (прямыми, углами, отрезками, фигурами и плоскостями);

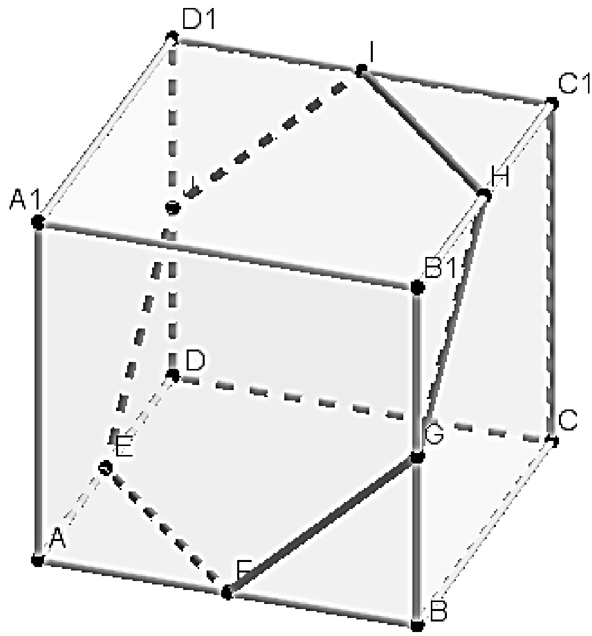

Рис. 1. Сечение куба

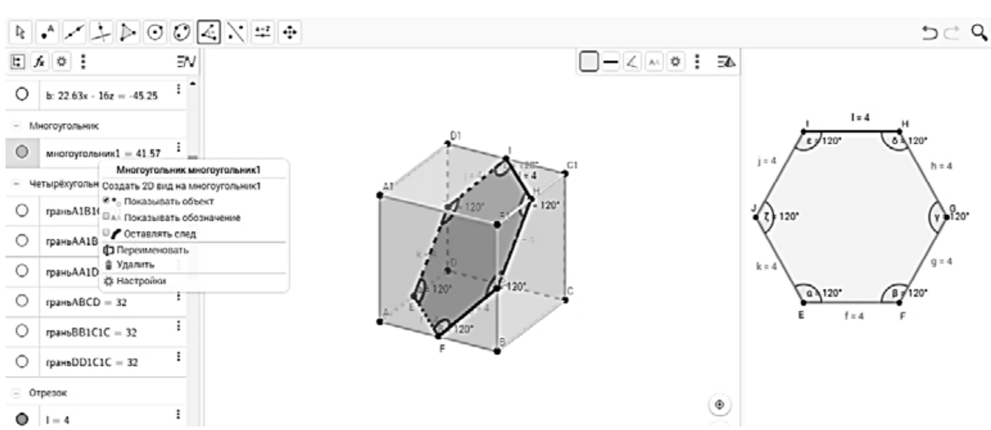

Рис. 2. Исследование сечения

• поиск необходимых числовых соотношений (выражение мер углов, площадей на основе использования планиметрических теорем и свойств).

Рассмотрим ниже две задачи ЕГЭ по математике [1] (профильный уровень) и примеры их визуализации в среде.

Задача 1.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, B_1C_1, AD;

б) найдите угол между плоскостью A_1BD и плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, B_1C_1, AD.

Автоматизированное измерение отрезков и углов «многоугольника 1» даёт возможность подтвердить справедливость выдвинутой гипотезы. Далее проводится фронтальная работа, в ходе которой обучающиеся обсуждают и записывают доказательство.

Для решения второй части задачи педагог проводит дополнительные построения и обсуждает справедливость соотношений. Последовательность решения задачи: определяются плоскости и линия пересечения плоскостей; определяются необходимые построения перпендикуляров для нахождения положения линейного угла между плоскостями. Визуализация дополнительных построений представлена на рисунке 3. На данном рисунке представлен уже конечный результат, где, очевидно, угол $\angle A_1OP$ является искомым углом между плоскостями.

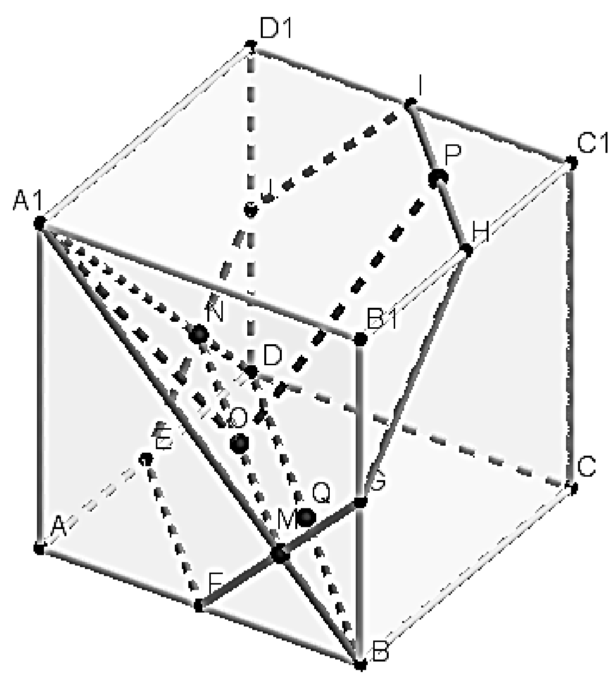

Рис. 3. Визуализация линейного угла двугранного угла

Далее необходимо определить величину этого угла. Для этого создаётся двумерный вид прямоугольника (рис. 4). Обучающимся необходимо доказать, что $OP \parallel QC_1$. После этого можно утверждать, что $\angle A_1OP = \angle A_1QC_1 = \angle\alpha$ – искомый угол.

Таблица 1

Этапы работы с задачами

Этап	Деятельность педагога	Деятельность обучающихся
1. Подготовительный	Педагог заранее (в неучебное время) разрабатывает модели задач, сохраняет их в своём облачном хранилище; организует доступ по ссылке.	–
2. Аналитический	Постановка задачи: формулировка условия, первичный анализ.	Выполняют анализ условия, выполняют пробный чертёж в тетради, выдвигают возможные гипотезы и варианты, планируют возможную стратегию решения.
3. Связующий	Педагог демонстрирует модель задачи (со скрытыми дополнительными построениями). Просит обучающихся ознакомиться с визуальной моделью. Приводит модель в динамику, описывает в соответствии с данными задачи (связывает образ модели с условием задачи).	Корректируют имеющиеся представления в соответствии с представленной моделью, вникают в структуру модели, наблюдают динамику, формируют устойчивый визуальный образ задачи, корректируют свой чертёж в соответствии с наиболее удачной формой представления модели.
4. Проблемно-поисковый	Педагог методом создания проблемных ситуаций ведёт обучающихся по пути решения задачи, задавая наводящие вопросы. По ходу рассуждений педагог проявляет на модели скрытые дополнительные построения, которые помогают найти необходимые геометрические соотношения и продвигаться в решении задачи.	Выполняют поиск необходимых соотношений, выдвигают гипотезы, аргументируют рассуждения, участвуют во фронтальной работе, выстраивают совместно с педагогом стратегию решения задачи. На данном этапе обучающиеся ничего не записывают: их внимание сосредоточено на модели и поиске необходимых соотношений.
5. Возврат	Педагог выполняет контролирующую функцию, при необходимости напоминает ключевые моменты решения.	Каждый в своей тетради воспроизводит дополнительные построения и оформляет решение задачи со всеми необходимыми обоснованиями, которые устно были проговорены во время анализа модели.
6. Вычисления	Вызывает обучающихся к доске для записи необходимых промежуточных численных вычислений, которые не были отражены в процессе визуализации модели.	Выполняют поиск численных взаимоотношений.
7. Первичное закрепление	Пользуется методом «взгляд назад». Ещё раз, визуализируя модель со скрытыми дополнительными построениями, проговаривает со школьниками основные моменты решения задачи, уже проявляя дополнительные построения в более быстром темпе.	Осознают повторно справедливость геометрических соотношений, правильность чертежа и ход построений.
8. Вторичное закрепление	–	Каждый учащийся может в домашних условиях ещё раз просмотреть модель задачи по предоставленной педагогом ссылке, глубже осознать её, закрепить её визуальный образ.

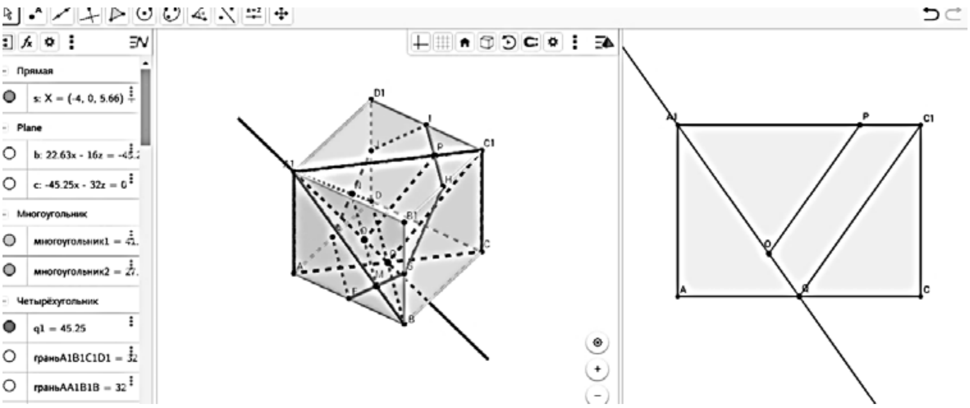

Рис. 4. Поиск равного угла

Завершающий этап – алгебраические вычисления и поиск линейных соотношений.

$$\Delta A_1QA = \Delta C_1QC_1 \Rightarrow \angle A_1QA = \angle C_1QC_1 = \angle\beta .$$

$$\angle A_1OA = \angle C_1OC = \angle\beta ,$$

$$2\angle\beta + \angle\alpha = 180^\circ ,$$

$$\Delta C_1OC : \; tg2\beta = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -2\sqrt{2} ,$$

$$tg\alpha = tg(180^\circ - 2\angle\beta) = -tg2\beta = -(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} ,$$

$$\angle\alpha = arctg2\sqrt{2} .$$

Ответ: $arctg2\sqrt{2}$.

Задача 2.

В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* все рёбра равны 1.

Точка *F* – середина ребра *SB*, *G* – середина ребра *SC*.

а) постройте прямую пересечения плоскостей *ABG* и *GDF*;

б) найдите угол между плоскостями *ABG* и *GDF*.

Построение линии пересечения плоскостей в среде автоматизировано. Обучающиеся анализируют модель, замечают, что *AG* – искомая прямая пересечения плоскостей *ABG* и *GDF*. Модель представлена на рисунке 5. С теоретической точки зрения построение прямой должно быть обосновано аксиомами стереометрии.

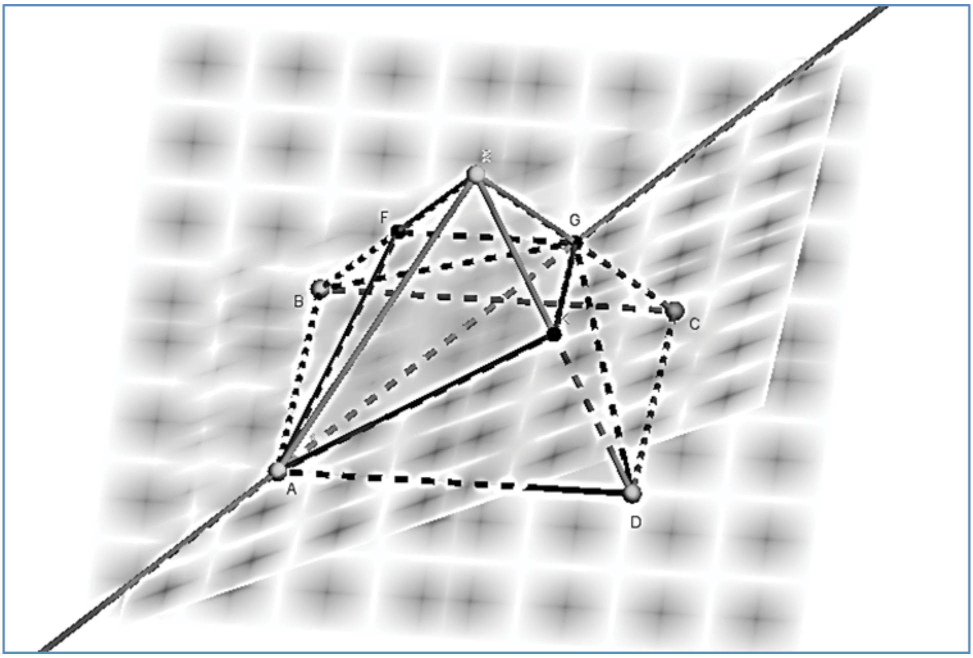

Рис. 5. Визуализация пересечения плоскостей и линия их пересечения

Для решения второго вопроса задачи, опять же, необходимо найти двугранный угол и его линейный угол. Обратим внимание, что двугранный угол у нас уже построен. Теперь наша задача – найти его линейный угол. Для этого из точек *F* и *K* на прямую *AG* необходимо опустить перпендикуляры. Классу необходимо объяснить, почему основания перпендикуляров совпадут: совпадение оснований связано с равенством треугольников: $\Delta AFG = \Delta AKG$. Все дополнительные построения представлены на рисунке 6.

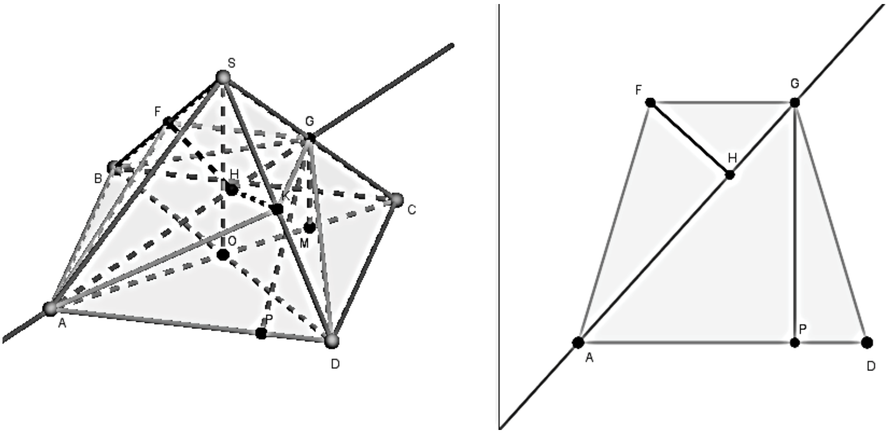

Рис. 6. Модель пирамиды с дополнительными построениями и выносной чертёж трапеции

Таким образом, предполагаемый искомый угол. Теперь выполним дополнительные построения, будем отыскивать величину искомого угла.

Дополнительные построения отрезков: *AC*, *BD*, *GM*, *GP*, *SO*; точки: *M*, *O*, *P*. После построений рассматривается, в частности, трапеция *AFGD*. Педагог может демонстрировать её двумерный вид. Делается всё это для удобства поиска метрических соотношений.

$$OS=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$AG^2=\sqrt{\left(\frac{SO}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\cdot AC\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2+18}{16}}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$AF=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ FG=\frac{1}{2},$$

$$GP=\sqrt{GD^2-PD^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4},$$

$$S_{AFG}=\frac{1}{2}\cdot FH\cdot AG=\frac{1}{2}\cdot FG\cdot GP,$$

$$FH=\frac{FG\cdot GP}{AG}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{11}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{5}},$$

$$FK=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\Delta FHK:\ FH=HK,$$

$$FK^2=FH^2+FH^2-2\cdot FH\cdot FH\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha=1-\frac{FK^2}{2FH^2}=1-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{5}}\right)^2}=1-\frac{20}{11}=-\frac{9}{11}\Rightarrow$$

Здесь необходимо замечание педагога о том, что если данная функция угла имеет отрицательное значение, то рассматриваемый угол является тупым. Поскольку под линейным углом понимается острый угол, искомым углом будет угол, смежный найденному углу $\angle\alpha$, следовательно:

$$\cos\beta=\cos(180^\circ-\angle\alpha)=-\left(-\frac{9}{1}\right)=\frac{9}{1}.$$

β – острый угол, искомый

$$\beta = \arccos\frac{9}{1}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos\frac{9}{1}.$$

В заключение хотелось бы отметить, что интерактивная геометрическая среда *GeoGebra* применима не только в разделе стереометрии – её применение отлично вплетается в изучение алгебры, теории вероятностей и планиметрии. Среда обладает широким функционалом и служит отличным интерактивным средством при обучении математике. Кроме того, она открывает возможности для организации многогранной исследовательской деятельности обучающихся, выступая при этом ярким и наглядным средством компьютерной визуализации.

Статья поступила в редакцию 30.03.2018

ЛИТЕРАТУРА

1. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. М., 2017. 256 с.
2. Казаков Н.А., Артамонова Е.И. Роль мотивации в развитии субъектности обучающихся общеобразовательной организации [Электронный ресурс] // Наука на благо человечества – 2017: сборник научных статей магистров и бакалавров по итогам Международной научной конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Москва, 17–28 апреля 2017 г. / отв. ред., сост. Е.А. Певцова. М., 2017. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM)
3. Казаков Н.А., Забелина С.Б. Реализация творческого аспекта учебной деятельности обучающихся на уроках математики // Наука на благо человечества – 2016. М., 2016. С. 35–41.
4. Пикалова В.В. Сотрудничество с Международным институтом GeoGebra как инструмент совершенствования математической подготовки будущего педагога // Образовательные технологии и общество. М., 2013. С. 564–574.
5. Саранцев Г.И. Методика обучения математике: методология и теория [Электронный ресурс]. URL: http://www.twirpx.com/file/583820 (дата обращения: 21.03.2018).
6. GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: https://www.geogebra.org (дата обращения: 21.03.2018).
7. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 3-е изд. М., 2014. 48 с.
8. Шевченко В.Г. Облачные технологии как средство формирования ИКТ-компетентности будущих учителей информатики: автореф. дис. … канд. пед. наук. М., 2016. 27 с.

REFERENCES

1. Yaschenko I.V., ed. *EGE. Matematika. Profil'nyi uroven': tipovye ekzamenatsionnye varianty: 36 variantov* [State Exam. Math. Profile of the levels: typical exam tests: 36 options]. Moscow, 2017. 256 p.
2. Kazakov N.A., Artamonova E.I. [The role of motivation in the development of subjectivity of students of educational organization]. In: Pevtsova E.A., ed., comp. *Nauka na blago chelovechestva – 2017: sbornik nauchnykh statei magistrov i bakalavrov po itogam Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii molodykh uchenykh, aspirantov i studentov, g. Moskva, 17–28 aprelya 2017 g.* [Science for the benefit of mankind – 2017: collection of scientific articles

of masters and bachelors on the results of the International scientific conference of young scientists, postgraduates and students, Moscow, April 17–28, 2017]. M., 2017. 1 electronic optical disc (CD-ROM).
3. Kazakov N.A., Zabelina S.B. [The implementation of the creative aspect of learning activities of students in mathematics lessons] In: *Nauka na blago chelovechestva – 2016* [Science for the benefit of mankind – 2016]. Moscow, 2016, pp. 35–41.
4. Pikalova V.V. [Cooperation with the International Institute of GeoGebra as a tool to improve the mathematical training of a future teacher]. In: *Obrazovatel'nye tekhnologii i obshchestvo* [Educational technology and society]. Moscow, 2013, pp. 564–574.
5. Sarantsev G.I. *Metodika obucheniya matematike: metodologiya i teoriya* [Methods of teaching mathematics: methodology and theory]. Available at: http://www.twirpx.com/file/583820/ (accessed: 21.03.2018).
6. *GeoGebra* [GeoGebra]. Available at: https://www.geogebra.org/ (accessed: 21.03.2018).
7. *Federal'nyi gosudarstvennyi obrazovatel'nyi standart osnovnogo obshchego obrazovaniya* [Federal State Educational Standard of basic general education]. Moscow, 2014. 48 p.
8. Shevchenko V.G. *Oblachnye tekhnologii kak sredstvo formirovaniya IKT-kompetentnosti budushchikh uchitelei informatiki: avtoref. dis. … kand. ped. nauk* [Cloud technologies as means of formation of ICT-competence of future teachers of computer science: abstract of PhD thesis in Pedagogic sciences]. Moscow, 2016. 27 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Казаков Никита Александрович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: alphan95@mail.ru

Пантелеймонова Анна Валентиновна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: av.panteleymonova@mgou.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikita A. Kazakov – student of Moscow Region State University, Faculty of Physics and Mathematics;
e-mail: alphan95@mail.ru

Anna V. Panteleimonova – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Informatics, Moscow Region State University;
e-mail: av.panteleymonova@mgou.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Казаков Н.А., Пантелеймонова А.В. Моделирование. Применение интерактивных геометрических сред как методическое средство повышения качества подготовки к ЕГЭ по математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2018. № 3. С. 117–128.
DOI: 10.18384/2310-7219-2018-3-117-128

FOR CITATION

Kazakov N., Panteleimonova A. Modeling. Application of interactive geometric media as a methodical means of improving the quality of preparation for the state exam in mathematics. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Pedagogics*, 2018, no. 3, pp. 117–128.
DOI: 10.18384/2310-7219-2018-3-117-128