УДК 372 851.
DOI: 10.18384/2310-7219-2016-2-32-43

КЛАССИФИКАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННАЯ С ВОПРОСОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Калинова Ю.А.
Лицей № 344
193315, Санкт-Петербург, улица Тельмана, д. 47, литер А, Российская Федерация

Аннотация. В статье затрагивается вопрос обучения учащихся работе с информацией (в частности, с противоречивой и неполной информацией). В этой связи обоснована целесообразность изучения геометрических задач, в которых описная фигура может не существовать или быть не единственной. Рассматривается методика работы с такими задачами. Изучается проблема существования математических объектов и ее частный случай: существование геометрических фигур. Приводится классификация геометрических задач, связанная с вопросом существования геометрических фигур.

Ключевые слова: существование геометрических фигур, теоремы существования, классификация геометрических задач, субъектный опыт.

CLASSIFICATION OF GEOMETRIC PROBLEMS ASSOCIATED WITH THE PROBLEM OF GEOMETRICAL FIGURES EXISTENCE

Ju. Kalinova
School № 344,
Liter A, 47, Telmana Street, St-Petersburg, 193315, the Russian Federation

Abstract. The article touches upon the problem of teaching schoolchildren to work witch information (in particular, with contradictory and incomplete information). In this connection, the author gives grounds for the expediency of studying geometric problems where the figure described is missing or may be not the only one. Methods of work with such problems are described. The problem of mathematical objects existence and its special case: the existence of geometric figures is scrutinized. The classification of geometric problems related to the issue of geometric figures is given.

Key words: geometric figures existence, theorems of existence, classification of geometric problems, subjective experience.

В настоящее время, когда происходит широкомасштабное внедрение информационно-коммуникационных технологий, глобальное увеличение объемов производства и передачи информации, названное «информационным взрывом», эффективность деятельности человека напрямую зависит от способности оперативно находить необходимую информацию и использовать ее для решения своих проблем [1], поэтому в современных условиях особое внимание должно уделяться обучению учащихся работе с информацией.

Однако среди влияний информационного поля необходимо выделить негативное информационное давление на человека [5]. В условиях, когда каждый желающий создает и свободно распространяет свою информацию, возникает масса необработанной информации, не подвергавшейся профессиональной экспертной оценке, а также заведомо ложная информация. Овладевая информационными умениями, учащиеся должны, в частности, усвоить, что, прежде чем пользоваться предоставленной информацией, необходимо проверить, достоверна ли эта информация [4]. Для этого нужно, чтобы учащиеся в процессе обучения время от времени сталкивались с недостоверной информацией и практиковались в установлении ее недостоверности.

Подобный опыт можно получить при решении геометрических задач, поскольку одним из видов недостоверной информации является геометрическая задача, в которой описанная фигура не существует [3]. Оценка достоверности информации предполагает не только умение обнаруживать недостоверность получаемых сведений, но и видеть пробелы в информации и находить пути восполнения этих пробелов. Для этого необходимо, чтобы учащиеся в процессе обучения время от времени сталкивались с неполной информацией и практиковались в установлении ее неполноты. Подобный опыт также можно получить при решении геометрических задач, поскольку одним из видов неполной информации является геометрическая задача с недостающими данными. Описанная в такой задаче фигура является неединственной.

Проблема существования и единственности изучаемых объектов ставится в различных науках и признается учеными одной из сложнейших философских проблем. В ходе исторического развития люди нередко пересматривали свое мнение относительно того, что именно действительно существует. Вопрос о существовании является проблематичным, прежде всего, потому, что наши знания относительны, изменчивы. Вместе с развитием знания изменяются наши представления о существующем. Человек не способен рассуждать о чем-либо иначе как на основе своих знаний, выработанных им концепций, теорий.

Среди математиков также нет единого мнения по поводу того, какие математические объекты можно считать существующими [2]. Математическое существование – характеристика математического объекта как приемлемого в данной теории. Если понимать математическую теорию как формальную структуру, то основным требованием для ее объектов, определяющим их приемлемость, является непротиворечивость: мы можем считать математический объект существующим (приемлемым), если имеются основания считать, что его использование в теории не может быть причиной появления в ней противоречащих выводов. Понятие математического существования как непротиворечивости снимает многие проблемы методологического и философского плана, связанные, к примеру, с пониманием мнимых чисел, неевклидовых геометрий, бесконечных множеств и т.п., т.е. объектов, не имеющих прямой интерпретации в опыте.

Понятие «математическое существование» в философии математики последнего столетия было уточнено в процессе обсуждения проблемы обоснования математики. Так, возникший интуиционистский подход к пониманию математического знания основывается на идее конструктивности объекта: математический объект приемлем (существует), если он представим в качестве интуитивно ясной конструкции из исходных объектов. Теорема существования, в которой объект строится явно, считается более содержательной, чем теорема, утверждающая существование какого-либо объекта, но не говорящая о том, каким образом его построить. Теоремы первого типа называются конструктивными теоремами существования, теоремы второго типа – теоремами чистого существования. Конструктивные теоремы существования обычно доказываются сложнее, чем соответствующие теоремы чистого существования. Объекты, введенные на основе чистых доказательств существования, с точки зрения интуиционистов, неприемлемы (не существуют) даже в том случае, если заведомо известно, что они удовлетворяют требованию непротиворечивости.

Несмотря на то, что проблема существования и единственности математических объектов является сложной философской проблемой, отдельные ее аспекты можно изучать на школьном уровне. В школьном курсе математики вопрос существования и единственности неоднократно затрагивается при изучении геометрии. Приведем пример утверждения существования и единственности из учебника геометрии (А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик): через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, ей параллельная, и притом только одна. Существование такой прямой доказывается: имеет место теорема существования прямой, параллельной данной. Единственность же составляет содержание аксиомы о параллельных прямых.

На уроках геометрии целесообразно рассматривать проблемы существования и единственности геометрических фигур при решении задач. Это можно делать уже при изучении планиметрии. Курс планиметрии изучается в школе с 7 по 9 класс. На заключительном этапе в 9 классе происходит обобщение и систематизация материала, пройденного за три года. На этом этапе целесообразно использовать задачи, в которых описанные фигуры могут не существовать или быть неединственными. Это позволяет выйти на принципиально новый уровень обобщения геометрического материала, связывающий три практически невзаимосвязанные в традиционной программе линии:

– задачи на вычисление,
– задачи на построение,
– теоремы существования.

Работу с такими задачами целесообразно начинать с мотивации этой деятельности. Необходимо, чтобы умение проверять предлагаемую информацию на предмет ее достоверности стало составляющим субъектного опыта учащихся. Для этого целесообразно в качестве мотивационных задач предлагать учащимся задачи на нематематическом материале, в которых они могут обнаружить недостоверность информации на основании своего жизненного опыта, и только потом переходить к аналогичным задачам на математическом материале, в которых вывод о недостоверности информации делается на основании математических теорем. В качестве мотивационных задач на нематематическом материале можно использовать загадки с подвохом. Приведем пример.

Загадка. *Почему в поездах стоп-краны красные, а в самолетах – голубые?*

Чтобы отгадать такую загадку, необходимо понять, что в ней содержится подвох – ложная информация о том, что самолеты имеют голубые стоп-краны. Правильный ответ: стоп-кранов в самолетах не бывает, поскольку летящий самолет остановить невозможно. Обсуждая подобные загадки, учащиеся должны прийти к выводу: чтобы говорить о свойствах объекта, надо проверить существует ли он.

После обсуждения такой задачи можно переходить к ее математическому аналогу.

Задача. *Определите периметр четырехугольника со сторонами 4, 6, 7 и 18.*

Чтобы решить такую задачу, необходимо, как и в предыдущем случае, понять, что в ней содержится подвох – ложная информация о том, что существует четырехугольник со сторонами 4, 6, 7 и 18. Правильный ответ: такой четырехугольник не существует, так как 18 больше, чем сумма чисел 4, 6 и 7, а в многоугольнике сторона не может быть больше, чем сумма длин всех других сторон.

Для того чтобы убедить учащихся в необходимости проверки существования описанной в задаче фигуры, можно использовать такой прием, как построение фигуры, описанной в уже решенной задаче, которое не удается осуществить, поскольку фигура не существует. В результате возникает проблемная ситуация, обсуждая которую учащиеся осознают, что выполненное ими решение было неверным.

Работу с задачами с недостающими данными целесообразно также начинать с мотивации этой деятельности. Для того чтобы умение видеть пробелы в информации стало составляющим субъектного опыта учащихся, мотивационные задачи целесообразно предлагать на нематематическом материале, позволяющем выявлять недостающие данные на основе жизненного опыта учащихся, а потом переходить к их математическим аналогам. В качестве мотивационной задачи можно использовать загадку-ситуацию.

Загадка-ситуация. *Студенты Андрей и Павел договорились встретиться в 8 часов в условленном месте с тем, чтобы Андрей передал Павлу конспект лекций. Павел ждал в условленном месте целый час, но Андрей так и не пришел. Объясните, что произошло.*

Дети обычно хорошо знакомы с загадками-ситуациями, но при необходимости нужно напомнить им правила. При игре в загадки-ситуации (или по-другому, данетки) игрокам нужно отгадать правильный ответ. Ответов может быть множество, например в данной загадке: «Андрей заболел», «Андрей застрял в пробке и поэтому не смог добраться вовремя». Но правильный ответ только один, заранее известный ведущему. Для того чтобы отгадать этот ответ, игроки могут задавать ведущему вопросы, но не любые, а только такие, на которые ведущий сможет ответить: «да», «нет» или «это не имеет значения». В данном случае правильный ответ следующий: «Они не договорились о времени дня. Один имел в виду 8 часов утра, а другой – 8 часов вечера». Обсуждая эту данетку, учащиеся должны осознать, что если в некоторой информации имеются недостающие данные, то разные люди могут понимать ее по-разному.

После этого при работе с математической задачей с недостающими данными можно организовать аналогичную ситуацию, в которой ученики поняли условие задачи по-разному. В ходе эксперимента мы убедились в том, что это не сложно, поскольку ученики, впервые столкнувшиеся с задачами с недостающими данными, обычно не видят, что возможны разные ситуации. Мы предложили им решить следующую задачу.

Задача. *Один из углов прямоугольного треугольника в 9 раз больше другого. Определите углы этого треугольника.*

При самостоятельном решении одни учащиеся получали в ответе 9°, 81°, 90°, другие – 10°, 80°, 90°. При этом практически ни у кого не возникало никаких дополнительных вопросов по решению задачи. Чтобы учащиеся увидели, что данных в задаче не хватает, чтобы однозначно определить одну ситуацию, можно использовать такой прием, как противопоставление мнений учащихся по одному и тому же вопросу. Работая с данной задачей, мы предложили двум учащимся, получившим разные ответ, рассказать свое решение у доски. После этого классу нужно было определить: кто из выступивших прав. В результате обсуждения возникшей проблемы дети осознали, что в данном случае условие задачи предполагает существование двух ситуаций.

Необходимо, чтобы дети научились распознавать такие задачи, в которых данных не хватает для однозначного задания одной ситуации. Учитель может противопоставить мнения учащихся, используя следующий прием: рассказать историю о том, как разные учащиеся получали разные ответы при решении подобных задач, и предложить выяснить, кто из них прав. Приведем пример такой истории.

Пример. *На уроке была задана задача: Две окружности, радиусы которых 2 и 5, имеют единственную общую точку. Определите расстояние между центрами этих окружностей.*

Оля сделала чертеж, приведенный слева (рис. 1), и получила решение:

$$O_1O_2 = O_1T + O_2T = 5 + 2 = 7 .$$

Витя сделал чертеж, приведенный справа (рис. 2), и получил решение:

$$O_1O_2 = O_1T - O_2T = 5 - 2 = 3 .$$

Кто из ребят прав?

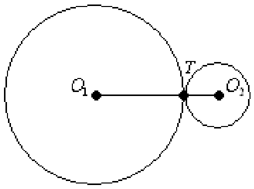


рис. 1

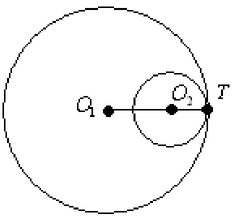


рис. 2

Способность учащихся выявлять различные ситуации, к которым применимо условие задачи, приобретается только в ходе систематической работы. Необходимо предлагать детям различные задания, позволяющие им поупражняться в выявлении возможных ситуаций. Чтобы направить учащихся на поиск всех ситуаций можно, к примеру, предложить задания, в которых говорится, что чертеж к задаче был стерт, и его нужно восстановить по краткой записи условия. Рассмотрим это на примере.

Пример. *На доске был чертеж и краткая запись:*

$AB = 8$, $AC = BC = 2\sqrt{13}$, $AD = BD = 5$. Определите CD.

Чертеж случайно стерли. Восстановите чертеж и получите ответ на вопрос задачи.

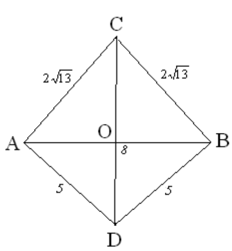


рис. 3

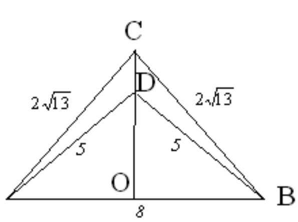


рис. 4

Учащиеся должны увидеть, что восстановить чертеж можно двумя разными способами (рис. 3, 4). Впоследствии при решении других задач учащиеся могут рассуждать следующим образом: допустим, чертеж к задаче прилагался, но потом пропал. Каким он мог быть?

Таким образом, описанная в задаче фигура может быть задана однозначно или неоднозначно, т.е. может существовать одна фигура, соответствующая данному описанию, или не одна. В первом случае требуемый элемент задачи, как и все остальные элементы, однозначно определяется заданными элементами. Во втором случае возможны разные варианты: требуемый элемент может однозначно определяться заданными элементами или не определяться. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20. Определите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу. Определите медиану треугольника, проведенную к гипотенузе.*

Описанная в задаче фигура задана неоднозначно. Действительно, прямоугольных треугольников с гипотенузой равной 20 существует бесконечно много. Но в первом случае требуемый элемент однозначно не определяется заданными элементами (Высота такого треугольника, опущенная на гипотенузу, принимает бесконечно много значений, каждое из которых принадлежит промежутку от 0 до 10.), а во втором – требуемый элемент однозначно определяется заданными элементами. (Медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, определена однозначно, она равна 10.)

Также можно выделить две причины несуществования описанной в задаче фигуры. **Первая причина несуществования описанной в задаче фигуры**: невыполнение условий теорем, задающих критерии существования геометрических фигур. Рассмотрим примеры таких теорем.

– Теорема о сумме углов треугольника.

– Неравенство треугольника.

– Против большего угла треугольника лежит большая сторона этого треугольника.

Перечисленные теоремы входят в обязательную программу по геометрии, учащиеся изучают их формулировки и доказательства. Но в ряде случаев не удается воспользоваться теоремой, содержащейся в учебнике. В этих случаях доказать, что фигура не существует, можно только самостоятельно, сформулировав более частную теорему существования, которой в учебнике по геометрии нет. Таких теорем можно сформулировать бесконечно много. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 11. Определите площадь треугольника.*

В данном случае доказать, что описанная в задаче фигура не существует, можно сославшись на теорему, которой нет в школьном учебнике: высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, не превосходит половины гипотенузы.

Вторая причина несуществования описанной в задаче фигуры: наличие лишних данных, противоречащих остальным данным. Лишним данным называется данное, которое может быть выведено из других данных. Оно может противоречить или не противоречить остальным данным. В случае, если оно противоречит остальным данным, описанная фигура не существует. Стоит отметить, что даже наличие лишних данных не гарантирует того, что фигура и требуемый элемент будут заданы однозначно. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20. Средняя линия, параллельная гипотенузе, равна 10. Определите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу.*

Опыт работы показывает, что учащиеся часто не видят разницы между задачей с недостающими данными, в которой нужно рассматривать разные ситуации, к которым применимо условие задачи, и задачей с лишними данными, где, используя разные наборы данных, можно получать разные ответы. Для предупреждения подобных ошибок можно обсудить с учащимися одновременно две такие задачи, используя при этом такой прием, как противопоставление мнений учащихся по одному и тому же вопросу. Рассмотрим это на примере. Учитель может предложить учащимся разобраться в ситуации, рассказав историю про Сашу и Машу.

Предположим, учитель задал следующую задачу.

Задача. *Один угол равнобедренного треугольника в 2 раза больше другого. Определите углы этого треугольника.*

Саша получил ответ: 40°, 40°, 80° (рис. 5).

Маша получила ответ: 36°, 72°, 72° (рис. 6).

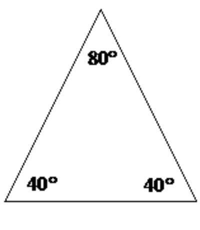


рис. 5

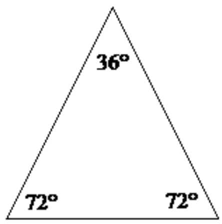


рис. 6

Определите, кто из ребят прав.

Предположим, учитель задал учащимся решить еще одну задачу.

Задача. *Высота, опущенная на сторону параллелограмма длиной 5, равна 3. Высота, опущенная на сторону параллелограмма длиной 4, равна 4* (рис. 7). *Определите площадь параллелограмма.*

Саша получил ответ: S = $5 \cdot 3$ =15.

Маша получила ответ: S = $4 \cdot 4$ =16.

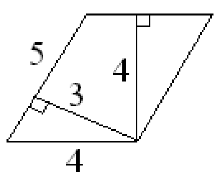


рис. 7

Определите, кто из них прав.

Учащиеся должны осознать, что при решении первой задачи правы были оба и в ответ пойдут два варианта, а при решении второй задачи – ни один не прав, и ответом будет «данная фигура не существует».

Таким образом, описанная в задаче фигура и требуемый элемент могут обладать следующими свойствами.

– Описанная фигура может быть задана с использованием лишних данных или без использования лишних данных.

– Описанная фигура может быть задана однозначно или неоднозначно.

– Описанная фигура может существовать или не существовать.

– Требуемый элемент может однозначно определяться заданными элементами или неоднозначно.

Поэтому, рассматривая выделенные свойства описанной в задаче фигуры в качестве оснований возможных типов геометрических задач, мы предлагаем следующую классификацию, представленную в схеме 1.

Таким образом, доказать, что описанная в задаче фигура не существует, можно сославшись на невыполнение теоремы существования или на наличие лишнего данного, противоречащего другим данным. Доказать, что описанная фигура существует, сложнее: для этого нужно предъявить способ ее построения. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример. *Две стороны треугольника равны 6 и 8. Медиана, проведенная к стороне длиной 8, равна 5. Определите третью сторону треугольника.*

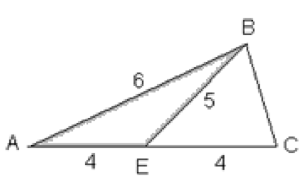


рис. 8

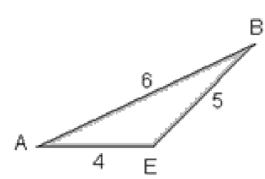


рис. 9

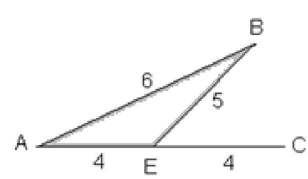
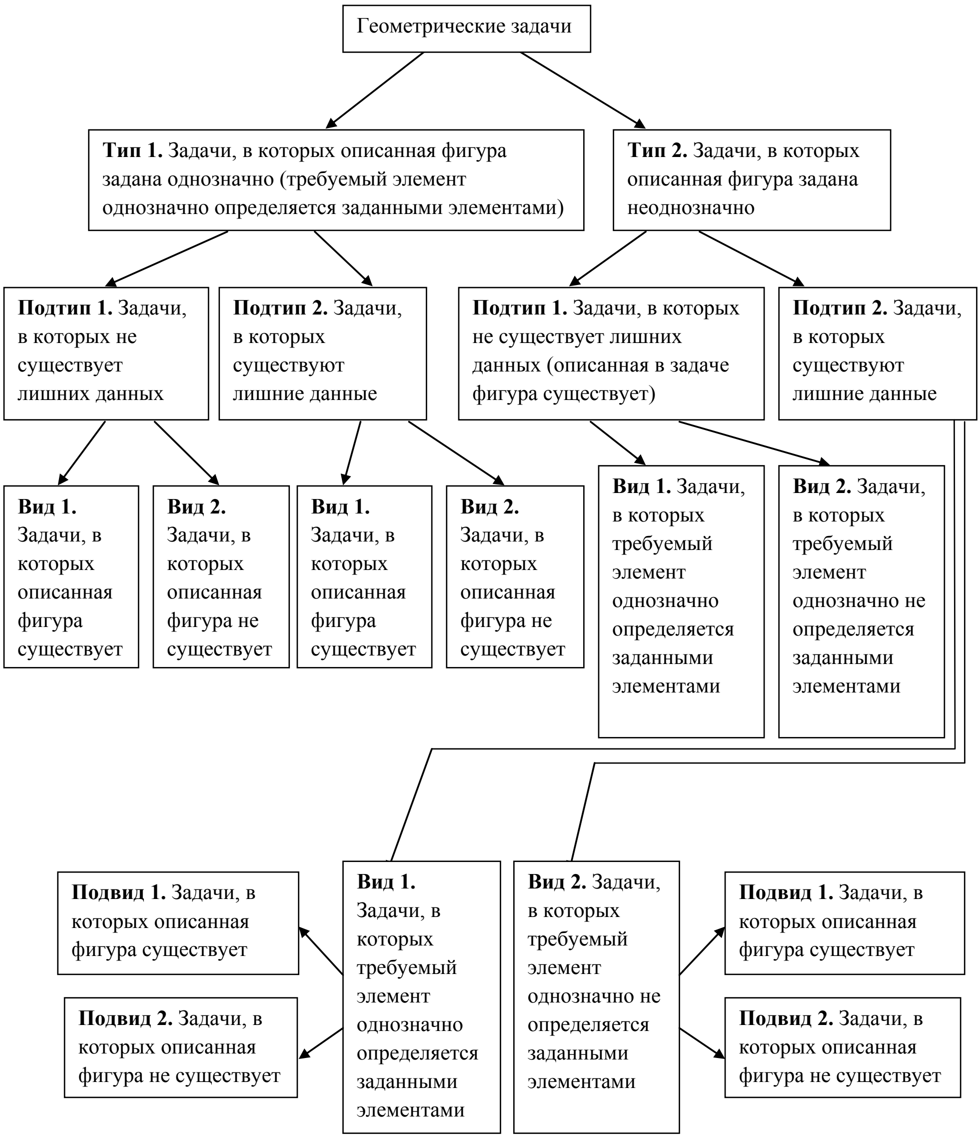


рис. 10

Можно доказать, что треугольник ABE существует и единственный (рис. 8). Действительно, его стороны (4, 5, 6) удовлетворяют неравенству треугольника, значит, он существует. Кроме того, если мы начертим два треугольника со сторонами 4, 5, 6, то они окажутся равными по третьему признаку равенства треугольников, значит, треугольник ABE единственный, поэтому построение описанной в задаче фигуры нужно

Схема 1



начинать именно с треугольника ABE, рассмотрим алгоритм такого построения.

1. Построим треугольник ABE (рис. 9).

2. На продолжении отрезка AE построим отрезок EC, равный 4 (рис. 10).

3. Соединим отрезком точки B и C.

В каждом из трех пунктов это можно сделать единственным образом. Треугольник ABC – искомый. Следует заметить, что работа по определению существования и единственности описанной в задаче фигуры является ценным эвристическим приемом решения задач на вычисление, поскольку она позволяет разобраться в отношениях и связях между элементами описанной фигуры. Рассмотрим это на примере последней задачи. Нужно определить отрезок BC. Видим, что треугольник ABE однозначно задан тремя сторонами, значит, мы можем его решить. С другой стороны, отрезок BC можно было бы найти из треугольника ABC, но мы знаем в нем только два элемента: стороны AB и AC. Замечаем, что у треугольников ABC и ABE есть общий угол, это угол BAC.

Теперь можно составить план решения задачи.

1. Из треугольника ABE находим угол BAC (достаточно найти его косинус, $\cos BAC = \dfrac{9}{16}$).

2. Из треугольника ABC находим BC (BC = $\sqrt{26}$).

Работа, связанная с проблемами существования и единственности описанных в задачах фигур, в геометрии является некоторым аналогом определения ОДЗ в алгебре. Действительно, можно найти корень уравнения, но не заметить, что при подстановке этого числа в уравнение выражение в одной из частей уравнения не имеет смысла. То же самое может произойти и в геометрии. Можно найти значение требуемого элемента и не заметить при этом, что на самом деле описанная фигура не существует. Рассмотрим подобную работу (аналогичную определению ОДЗ в алгебре) на примере задачи, в которой фигура описана с использованием лишних данных. В этом случае доказательство существования фигуры проводится в два этапа.

1. Отбросить лишнее данное и доказать, что фигура, заданная без лишних данных, существует.

2. Доказать, что это число выводится из остальных данных.

Пример. *Медианы треугольника, проведенные к сторонам длины 14 и 16, равны* $\sqrt{209}$ *и* $2\sqrt{41}$ *соответственно. Определите третью сторону треугольника.*

Для того чтобы определить, существует ли описанная фигура, необходимо прежде всего понять, что описание этой фигуры содержит лишние данные. При решении задач данного типа (когда описанная фигура задана однозначно) это можно сделать, отбросив некоторые данные и установив, что при оставшихся данных фигура задана однозначно, а это значит, что все остальные данные – лишние. Следовательно, они могут быть выведены из тех данных, которые мы оставили.

Отбросим, например, данное: медиана, проведенная к стороне длины 14, равна $\sqrt{209}$ (рис. 11). Тогда нужно решить следующий вопрос: две стороны треугольника равны 14 и 16. Медиана, проведенная к стороне длины 16, равна $2\sqrt{41}$. Существует ли данная фигура и является ли она единственной? Проверяем, что это так.

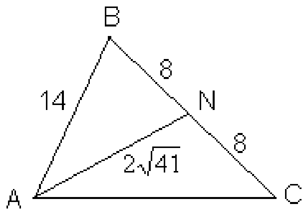


рис. 11

Теперь нужно узнать, выводится ли отброшенное данное из тех данных, которые мы оставили. Две стороны треугольника равны 14 и 16. Медиана, проведенная к стороне длины 16, равна $2\sqrt{41}$. Верно ли, что тогда медиана, проведенная к стороне длины 14, равна $\sqrt{209}$? Это верно. Для доказательства этого из треугольника ABN с помощью теоремы косинусов находим $\cos ABC = \frac{3}{7}$. Зная косинус угла ABC, из треугольника MBC находим: CM = $\sqrt{209}$. Значит, описанная фигура существует. Переходим к выполнению требования задачи: из треугольника ABC с помощью теоремы косинусов находим: AC = $2\sqrt{65}$.

Таким образом, учителям математики стоит на уроках геометрии рассматривать вопрос существования и единственности описанных в задачах фигур. При работе с данным материалом можно использовать разработанную нами классификацию.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Афонин И.А. Современный муниципальный лицей и инновационный потенциал личности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2013. № 2. С. 7–11.
2. Молодший В.Н. Очерки по философским вопросам математики. М., 1969. 304 с.
3. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. и др. Методика и технология обучения математике. Курс лекций. СПб., 2005. 418 с.
4. Халперн. Д. Психология критического мышления. СПб., 2000. 506 с.
5. Чернов А.А. Становление глобального информационного общества: проблемы и перспективы. М., 2003. 232 с.

REFERENCES

1. Afonin I.A. Sovremennyi munitsipal'nyi litsei i innovatsionnyi potentsial lichnosti [Modern Municipal High School and the Innovative Potential of a Personality] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Pedagogika. 2013. no. 2. pp. 7–11.
2. Molodshii V.N. Ocherki po filosofskim voprosam matematiki [Essays on Philosophy of Mathematics]. M., 1969. 304 p.
3. Stefanova N.L., Podkhodova N.S. i dr. Metodika i tekhnologiya obucheniya matematike. Kurs lektsii ,etc. [Methods and Practice of Teaching Mathematics. Course of Lectures]. SPb., 2005. 418 p.
4. KHalpern. D. Psikhologiya kriticheskogo myshleniya [Psychology of Critical Thinking]. SPb., 2000. 506 p.
5. Chernov A.A. Stanovlenie global'nogo informatsionnogo obshchestva: problemy i perspektivy [The Formation of the Global Information Society: Problems and Prospects]. M., 2003. 232 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Калинова Юлия Александровна – педагог дополнительного образования Лицея № 344;
e-mail: juliakalinova@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kalinova Julija A. – teacher of additional education, School № 344;
e-mail: juliakalinova@bk.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Калинова Ю.А. Классификация геометрических задач, связанная с вопросом существования геометрических фигур // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2016. № 2. С. 32-43.
DOI: 10.18384/2310-7219-2016-2-32-43

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

J. Kalinova Classification of geometric problems associated with the problem of geometrical figures existence // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Pedagogics. 2016. no 2. pp. 32-43.
DOI: 10.18384/2310-7219-2016-2-32-43